



Atractores de Equações de Reacção-Difusão

Carlos Rocha, IST

Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos

Encontro Nacional de Ciência - CIÊNCIA 2009

Equações de reacção-difusão surgem como modelos particularmente úteis em processos Físicos, Químicos, Biológicos, Ambientais e mesmo Sociais.

$$\partial_t U = \Delta U + F(U)$$

$$U = U(t, x) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad x \in \Omega$$

$$B(x, U) = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega$$

Equações de reacção-difusão surgem como modelos particularmente úteis em processos Físicos, Químicos, Biológicos, Ambientais e mesmo Sociais.

$$\partial_t U = \Delta U + F(U)$$

$$U = U(t, x) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad x \in \Omega$$

$$B(x, U) = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega$$

* * *

Descrição da evolução das concentrações U sob a influência de dois processos

- difusão espacial, Δ
- reacções locais, F

Nos últimos 20 anos têm sido desenvolvidos esforços para integrar este tipo de problemas na linguagem dos sistemas dinâmicos com o objectivo de obter a descrição da evolução temporal global da solução.

Nos últimos 20 anos têm sido desenvolvidos esforços para integrar este tipo de problemas na linguagem dos sistemas dinâmicos com o objectivo de obter a descrição da evolução temporal global da solução.

As equações dadas geram um sistema dinâmico $T(\cdot) : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ num espaço de funções $X = W^{s,p}(\Omega)$ adequado ao contexto das equações diferenciais parciais:

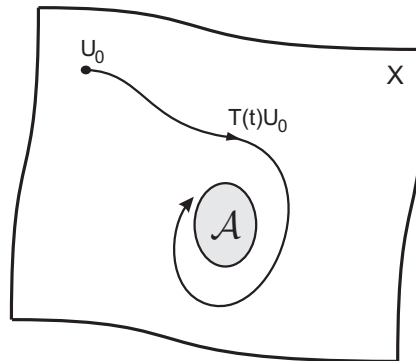
$$T(t)U_0(x) = U(t, x) \quad , \quad U_0(x) = U(0, x) \in X$$

Nos últimos 20 anos têm sido desenvolvidos esforços para integrar este tipo de problemas na linguagem dos sistemas dinâmicos com o objectivo de obter a descrição da evolução temporal global da solução.

As equações dadas geram um sistema dinâmico $T(\cdot) : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ num espaço de funções $X = W^{s,p}(\Omega)$ adequado ao contexto das equações diferenciais parciais:

$$T(t)U_0(x) = U(t, x) \quad , \quad U_0(x) = U(0, x) \in X$$

O comportamento assintótico das soluções encontra-se inteiramente representado no conjunto *attractor global* $\mathcal{A} \subset X$.



Um caso particularmente feliz diz respeito ao problema:

- $\dim \Omega = 1$, $B = \partial_\nu$

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x)$$

$$\Omega = (0, \pi) \subset \mathbb{R} \quad , \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0$$

Um caso particularmente feliz diz respeito ao problema:

- $\dim \Omega = 1$, $B = \partial_\nu$

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x)$$

$$\Omega = (0, \pi) \subset \mathbb{R} \quad , \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0$$

Neste caso o problema é bem posto (propriedade de *Morse-Smale*):

- genericamente o atrator global contém um número finito de soluções de equilíbrio $u_j = u_j(x)$ hiperbólicas;
- os pontos de equilíbrio e as suas variedades invariantes dependem continuamente dos parâmetros do problema;
- as variedades invariantes estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio intersectam-se transversalmente.

Um caso particularmente feliz diz respeito ao problema:

- $\dim \Omega = 1$, $B = \partial_\nu$

$$u_t = u_{xx} + f(x, u, u_x)$$

$$\Omega = (0, \pi) \subset \mathbb{R} \quad , \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0$$

Neste caso o problema é bem posto (propriedade de *Morse-Smale*):

- genericamente o atrator global contém um número finito de soluções de equilíbrio $u_j = u_j(x)$ hiperbólicas;
- os pontos de equilíbrio e as suas variedades invariantes dependem continuamente dos parâmetros do problema;
- as variedades invariantes estáveis e instáveis dos pontos de equilíbrio intersectam-se transversalmente.

O atrator global $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$ é estruturalmente estável

$$\mathcal{A} = \bigcup_j W^u(u_j)$$

Caracterização das dinâmicas \leftrightarrow Classificação dos atratores

Caracterização das dinâmicas \leftrightarrow Classificação dos atratores

Problema Modelo: $f_\lambda(u) = \lambda u - u^3$ Chafee–Infante '74

$$u_t = u_{xx} + \lambda u - u^3 \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$$

Caracterização das dinâmicas ↔ Classificação dos atratores

Problema Modelo: $f_\lambda(u) = \lambda u - u^3$ Chafee–Infante '74

$$u_t = u_{xx} + \lambda u - u^3, \quad 0 < x < \pi, \quad u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$$

Soluções de equilíbrio, $u_{xx} + \lambda u - u^3 = 0$:

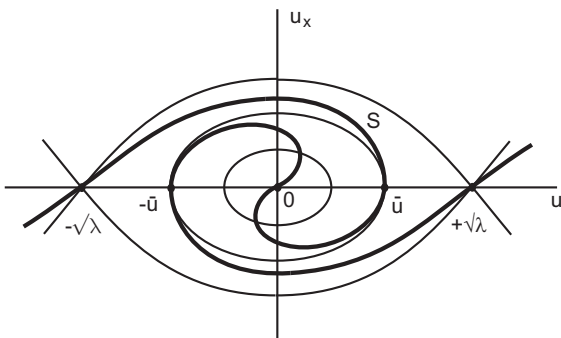
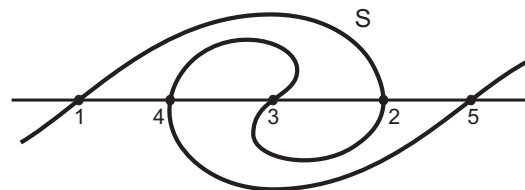


Diagrama no plano
de fase (u, u_x)



Meandro S e
Permutação de Sturm

$$\sigma_\lambda = \{1 \ 4 \ 3 \ 2 \ 5\}$$

Atractores de Chafee-Infante

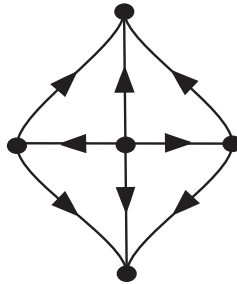
$\lambda < 0$



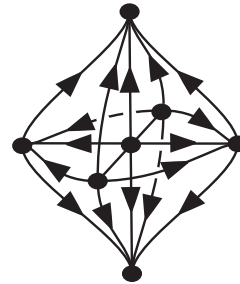
$0 < \lambda < 1$



$1 < \lambda < 4$



$4 < \lambda < 9$

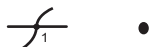


$n^2 < \lambda < (n+1)^2$

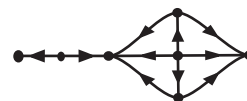
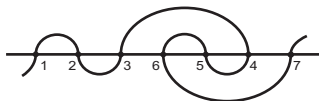


Lista de atractores com $n \leq 7$ equilíbrios:

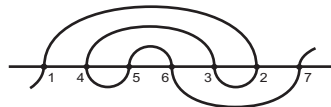
$n=1$



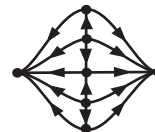
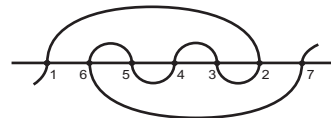
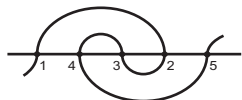
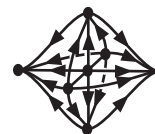
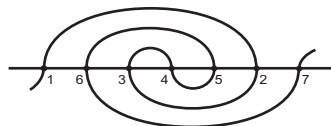
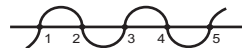
$n=7$



$n=3$



$n=5$

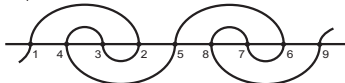


Permutações de Sturm com $n = 9$:

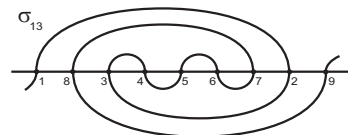
σ_1



σ_7



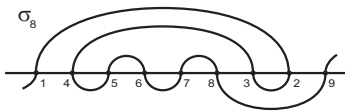
σ_{13}



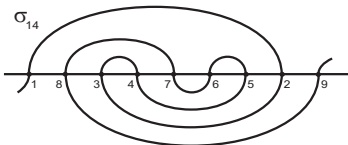
σ_2



σ_8



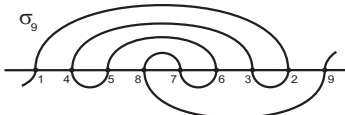
σ_{14}



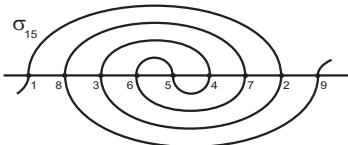
σ_3



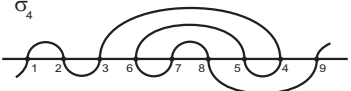
σ_9



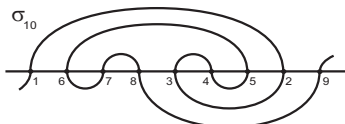
σ_{15}



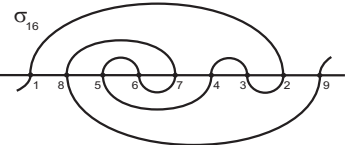
σ_4



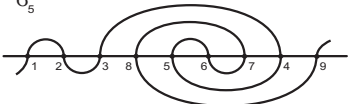
σ_{10}



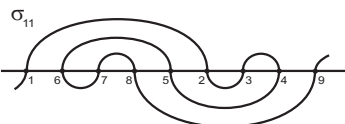
σ_{16}



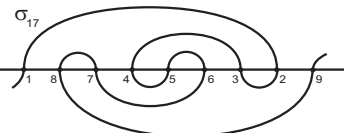
σ_5



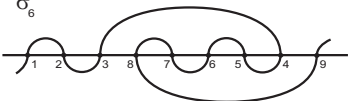
σ_{11}



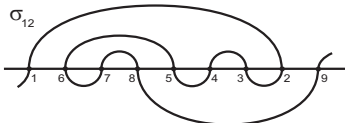
σ_{17}



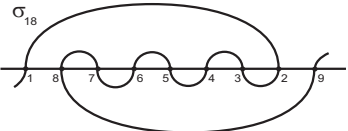
σ_6



σ_{12}



σ_{18}



Os problemas anteriores possuem uma estrutura variacional:

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \quad , \quad \mathcal{L} = \int_{\Omega} \Phi(x, u, u_x) dx \quad ,$$

da qual resulta a simplicidade do atrator \mathcal{A} que não possui órbitas periódicas.

Os problemas anteriores possuem uma estrutura variacional:

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \quad , \quad \mathcal{L} = \int_{\Omega} \Phi(x, u, u_x) dx \quad ,$$

da qual resulta a simplicidade do atrator \mathcal{A} que não possui órbitas periódicas.

Tal não é, em geral, o caso quando $\dim \Omega > 1$. No entanto, resultados recentes permitiram obter a estrutura do atrator \mathcal{A} em problemas da forma

- $\Omega = S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$u_t = u_{xx} + f(u, u_x) \quad , \quad x \in S^1 \quad .$$

Os problemas anteriores possuem uma estrutura variacional:

$$\partial_t u = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \quad , \quad \mathcal{L} = \int_{\Omega} \Phi(x, u, u_x) dx \quad ,$$

da qual resulta a simplicidade do atrator \mathcal{A} que não possui órbitas periódicas.

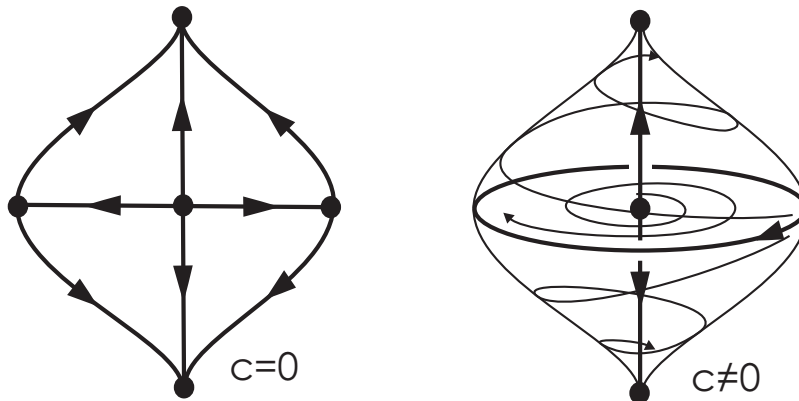
Tal não é, em geral, o caso quando $\dim \Omega > 1$. No entanto, resultados recentes permitiram obter a estrutura do atrator \mathcal{A} em problemas da forma

- $\Omega = S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$u_t = u_{xx} + f(u, u_x) \quad , \quad x \in S^1 \quad .$$

O problema é igualmente bem posto (genericamente Morse-Smale) e a classificação dos atratores obtem-se a partir das permutações de Sturm.

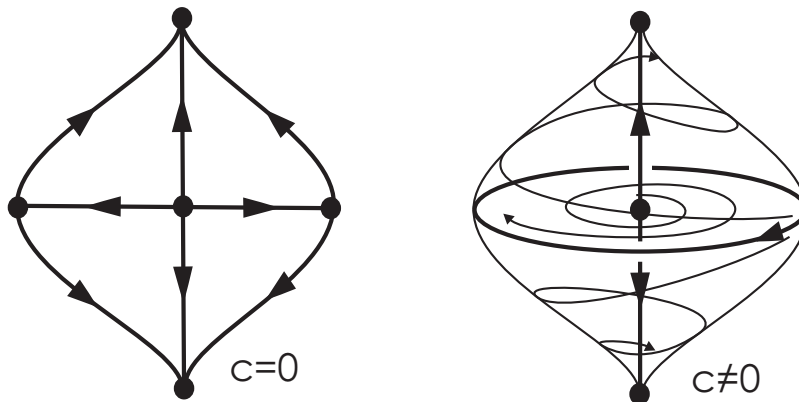
Atrator de Morse-Smale com 3 equilíbrios e 1 órbita periódica:



$$\dim \mathcal{A} = 3$$

$$u_t = u_{xx} + \lambda u - u^3 + cu_x, \quad 1 < \lambda < 4$$

Atrator de Morse-Smale com 3 equilíbrios e 1 órbita periódica:



$$\dim \mathcal{A} = 3$$

$$u_t = u_{xx} + \lambda u - u^3 + cu_x, \quad 1 < \lambda < 4$$

No caso geral $f = f(x, u, u_x)$ o problema é genericamente Morse-Smale, mas a estrutura do atrator é ainda um problema em aberto.