

# Programação quadrática: novas aproximações convexas

João Xavier

Instituto Sistemas e Robótica – Instituto Superior Técnico

- Programação quadrática:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x^\top A_0 x \\ &\text{sujeito a} && x^\top A_1 x = b_1 \\ &&& \vdots \\ &&& x^\top A_k x = b_k \\ &&& x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

- **Imensas** aplicações em engenharia !
- NP-difícil

Estado da arte:

- $k = 2$ : existe reformulação convexa
- $k \geq 3$ : existe **aproximação** convexa

Hoje:

- $k = 3$ , caso particular: existe **nova aproximação\*** convexa
- Primeiras aplicações em engenharia

Caso particular:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && x^\top A_0 x \\ &\text{sujeito a} && x^\top \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 1 \\ &&& x^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} x = 1 \\ &&& x^\top \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \\ &&& x \in \mathbb{R}^6 \end{aligned}$$

Interpretação: problema quadrático sobre a variedade Stiefel

$$O(3, 2) = \{Q \in \mathbb{R}^{3 \times 2} : Q^\top Q = I_2\}$$

Problema equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \text{tr}(A_0 X) \\ \text{sujeito a} & X \in \text{co } S \\ & X \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \end{array}$$

$$S = \{qq^T : q = \text{vec}(Q) \text{ para algum } Q \in \text{O}(3, 2)\}$$

**Conjectura:** co  $S$  é o conjunto de matrizes

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix}$$

tais que

$$X \succeq 0, \operatorname{tr}(A) = 1, \operatorname{tr}(C) = 1, \operatorname{tr}(B) = 0$$

e

$$\begin{bmatrix} I - A - C & \beta \\ \beta^\top & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \beta = \begin{bmatrix} B_{23} - B_{32} \\ B_{31} - B_{13} \\ B_{21} - B_{12} \end{bmatrix}$$

Em colaboração com: M. Stosic and M. Dodig

## Aplicação: reconstrução 3D de objecto rígido

- Problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \|A - BQ\|^2 \\ &\text{sujeito a} && Q \in O(3, 2) \end{aligned}$$

- **Nova aproximação** convexa:

- Reformulação:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && -\sqrt{\text{tr}(CX)} + \text{tr}(DX) \\ &\text{sujeito a} && X \in S \end{aligned}$$

- Aproximação:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && -\sqrt{\text{tr}(CX)} + \text{tr}(DX) \\ &\text{sujeito a} && X \in \text{co } S \end{aligned}$$

Resultados: probabilidade de gerar minimizante global

	Aproximação usual	<b>Nova aproximação</b>
$A, B \sim \mathcal{N}(0, 1)$	51%	<b>100%</b>
$A, B \sim$ uniforme $[-1, 1]$	58%	<b>100%</b>
$A, B \sim$ Bernoulli $\{-1, 1\}$	59%	<b>100%</b>

## Aplicação: reconstrução 3D de objecto deformável

- Problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \text{vec}(Q)^\top A \text{vec}(Q) \\ & \text{sujeito a} && Q \in \mathcal{O}(3, 2) \end{aligned}$$

- **Nova aproximação** convexa:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \text{tr}(AX) \\ & \text{sujeito a} && X \in \text{co } S \end{aligned}$$

Em colaboração com: Alessio del Bue *et al.*

Resultados: probabilidade de gerar minimizante global

	Aproximação usual	<b>Nova aproximação</b>
$A \sim \mathcal{N}(0, 1)$	74%	<b>100%</b>
$A \sim$ uniforme $[-1, 1]$	77%	<b>100%</b>
$A \sim$ Bernoulli $\{-1, 1\}$	77%	<b>100%</b>

## Aplicação: projecção nas matrizes essenciais

- Problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \|A - LQ\|^2 \\ & \text{sujeito a} && L : \text{triangular superior} \\ & && L(1, 2) = 0 \\ & && Q \in O(3) \end{aligned}$$

- **Nova aproximação** convexa:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \text{tr}(BX) \\ & \text{sujeito a} && X \in \text{co } S \end{aligned}$$

Em colaboração com: José Gaspar

Resultados: probabilidade de gerar minimizante global

	Aproximação usual	<b>Nova aproximação</b>
$A_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$	72%	<b>100%</b>
$A_0 \sim$ uniforme $[-1, 1]$	76%	<b>100%</b>
$A_0 \sim$ Bernoulli $\{-1, 1\}$	78%	<b>100%</b>

Questão relacionada:  $F(B)$  é um conjunto convexo ?

- $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, F(x) = (x^\top A_1 x, \dots, x^\top A_k x)$
- $B = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top B_1 x = c_1, \dots, x^\top B_m x = c_m\}$

Estado da arte:

- $k = 2, m = 1$ : sim

**Imensas** aplicações em engenharia !